수학1 | 1. 수열

정의역이 자연수인 함수를 우리는 수열이라고 하게 됩니다. a_n이라는 표현으로 수열의 일반항을 표시하고 n은 자연수의 범위인 수열이 됩니다.

수열 파트에서 중요한 문제들은 여러 가지 수열문제(등차수열, 등비수열 및 여러 가지 수열의 합), 수열의 귀납적 추론, 수열의 극한, 무한등비급수의 도형 문제 등이 있습니다.

공부를 하실 때, 위 4가지에 초점을 맞추어 공부를 하시면 됩니다.

Point 1 등차수열, 등비수열 및 등차중항과 등비중항

등차수열과 등비수열은 가장 기본적인 수열로서 각각 등차(차이가 같다), 등비(비율이 같다)라는 의미를 가지게 됩니다.

즉, a_n, a_{n+1}의 관계에서

① $a_{n+1} - a_n = d(\text{공차})$로 일정한 수열을 등차수열

② $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = r(\text{등비})$인 수열을 등비수열

이라 부르게 됩니다.

수열에서 가장 중요한 것은 수열의 일반항의 모습과, 수열의 합입니다.

수열의 일반항 모습은 필수적으로 외워야 되며, 유도과정은 교과서를 참고해서 한 번 정도는 꼭 필사를 해보시길 바랍니다.

$a_n = a_1 + (n-1)d$, $a_n = a_1 \times r^{n-1}$이 각각 등차 등비수열의 일반항이 되며

수열의 합의 모습은

$$① \ S_n = \sum_{k=1}^{n} a_n = \frac{n\left(2a_1 + (n-1)d\right)}{2} ,$$

$$② \ S_n = \frac{a_1\left(r^n - 1\right)}{r-1} = \frac{a_1\left(1 - r^n\right)}{1-r} \ (r \neq 1)$$

가 됩니다.

하지만, 위 모든 공식을 관통하는 핵심은 등차, 등비중항입니다.

예를 들어, $1, 3, 5, 7, 9, \ldots.$로 진행되는 등차수열이 있다고 생각합시다. 위 수열에서 $1+3+5+7+9$를 구하라는 문제가 나오면 단순히 공식에 대입하여 풀 수도 있지만 핵심적인 생각은 등차중항을 이용하는 것입니다. 등차중항이란, 등차수열의 중앙값에 해당한다 할 수 있습니다. $a-d, a, a+d$라는 수열이 있다면 a가 등차중항이 됩니다.

위 문제에서 $1, 3, 5, 7, 9$의 등차중항은 5가 되고 이는 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=5a_3$로 생각하는 것과 같아 25가 답이 됩니다.

마찬가지로 등비중항이란 등비수열의 중앙값에 해당하는데, $\frac{a}{r}, a, ar$이 있을 시 a에 해당하게 됩니다. $2\times4\times8$의 등비수열의 곱의 합을 구하라 하면 이는 $2, 4, 8$의 등비중항인 4를 생각하여 4^3이라 생각하면 된다는 뜻이 됩니다.

또한 이들을 이용하여 수열을 Setting 하는데도 도움이 됩니다.
만약 **네 수가 등차수열을 이룬다**는 표현이 나온다면

$$a-3d, a-d, a+d, a+3d$$

세 수가 등차수열을 이룬다면

$$a-d, a, a+d$$

마찬가지로 세 수가 등비수열을 이룬다면 $\frac{a}{r}, a, ar$등으로 셋팅을 한다면 더 편하게 계산을 할 수 있습니다.

예제 1 2012학년도 9월 모의평가 수학 나형 3번

등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1=1, a_4=7$일 때, a_2+a_3의 값은?

a_1, a_4가 주어져있고, 구하고자 하는 것은 a_2+a_3를 구하라 하고 있습니다. $a_2+a_3=2a_{2.5}$가 되고 $a_1+a_4=2a_{2.5}$가 됩니다.

따라서 답은 8이 됩니다. (수열은 정의역이 자연수이지만, 편의상 소수나 다른 것도 들어갈 수 있다고 생각하시면 됩니다.)

예제 2 2017학년도 대학수학능력시험 수학 나형 15번

공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_2의 값은?

(가) $a_6+a_8=0$
(나) $\lvert a_6\rvert=\lvert a_7\rvert+3$

$a_6+a_8=2a_7$이므로 $a_7=0$이 됩니다.

따라서, $\lvert a_6\rvert=3$이 되고, 공차가 양수이므로 $a_6=-3, a_7=0, a_8=3$이 되게 됩니다. 따라서 답은 $a_2=-15$가 됩니다.

(이를 생각할 때도, a_2, a_4, a_6, a_8이란 수열을 생각해 보면 공차가 6이 되므로, a_6에서 -12를 해준 -15가 답이 됩니다.)

예제 3 2019학년도 6월 모의평가 수학 나형 13번

자연수 n에 대하여 x에 대한 이차방정식 $x^2-nx+4(n-4)=0$이 서로 다른 두 실근 $\alpha, \beta\,(\alpha<\beta)$를 갖고, $1, \alpha, \beta$가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, n의 값은?

$1+\alpha+\beta = 3\alpha = n+1$이 되므로, $\alpha = \dfrac{n+1}{3}$가 되고, $\alpha+\beta=n$에서 $\beta=\dfrac{2n-1}{3}$가 됩니다.

$\alpha\times\beta=4(n-4)=\dfrac{(n+1)(2n-1)}{9}$이므로 $n=11$이 됩니다.

예제 4 2010학년도 6월 모의평가 수학 나형 6번

1과 2 사이에 n개의 수를 넣어 만든 등차수열 $1, a_1, a_2, \cdots, a_n, 2$의 합이 24일 때, n의 값은?

$1, a_1, a_2, \cdots, a_n, 2 = a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, a_{n+1}$이므로 합은 등차중항을 이용하면

$1+a_1+a_2+\cdots+a_n+2=\dfrac{3}{2}\times(n+2)=24$가 됩니다.

따라서 구하고자 하는 답은 $n=14$입니다.

예제 5 2017학년도 6월 모의평가 수학 나형 15번

공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 이차방정식 $x^2-14x+24=0$의 두 근이 a_3, a_8일 때, $\sum_{n=3}^{8} a_n$의 값은?

$\sum_{n=3}^{8} a_n = 6\times a_{5.5}$인데, $a_3+a_8=14=2a_{5.5}$이므로

구하고자 하는 답은 42가 됩니다.

예제 6 2007학년도 대학수학능력시험 수학 나형 18번

수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_3 = 2, a_6 = 16$일 때, a_9의 값을 구하시오.

등비중항을 생각해보면 $a_3 \times a_9 = (a_6)^2 = (16)^2$이므로 $a_9 = 128$이 됩니다.

예제 7 2007학년도 9월 모의평가 수학 나형 23번

이차방정식 $x^2 - kx + 125 = 0$의 두 근 $\alpha, \beta(\alpha < \beta)$에 대하여 $\alpha, \beta - \alpha, \beta$가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, 양수 k의 값을 구하시오.

등비중항을 생각하면 $\alpha \times \beta = (\beta - \alpha)^2$가 됩니다.
따라서 $\alpha\beta = (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta$으로 $(\alpha+\beta)^2 = 5\alpha\beta$이므로 $k^2 = 5 \times 125$이므로
$k = 25$가 됩니다.

예제 8 2015학년도 6월 모의평가 수학 나형 16번

공차가 6인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 세 항 a_2, a_k, a_8은 이 순서대로 등차수열을 이루고, 세 수열 a_1, a_2, a_k는 이 순서대로 등비수열을 이룬다. $k + a_1$의 값은?

a_2, a_k, a_8이 순서대로 등차수열을 이루므로, a_k는 a_2, a_8의 등차중항이 되므로 $k = 5$가 됩니다.
또한 a_1, a_2, a_k가 등비수열을 이루므로 등비중항을 생각하여 $(a_2)^2 = a_1 \times a_k = a_1 \times a_5$가 됩니다. 따라서 $(a_1 + 6)^2 = a_1 \times (a_1 + 24)$가 되므로 $a_1 = 3, k = 5$이므로 답은 8이 됩니다.

예제 9 2018학년도 대학수학능력시험 수학 나형 14번

등차수열 $\{a_n\}$이 $a_5+a_{13}=3a_9$, $\sum_{k=1}^{18} a_k = \frac{9}{2}$ 를 만족시킬 때, a_{13}의 값은?

$a_5+a_{13}=2a_9$ 이므로 $a_9=0$이다. $\sum_{k=1}^{18} a_k = 18\times a_{9.5}=\frac{9}{2}$가 되므로 $a_{9.5}=\frac{1}{4}$가 됩니다.

따라서 $2(a_{9.5}-a_9)=\frac{1}{2}$가 공차가 됩니다. $a_9+4\times\frac{1}{2}=a_{13}=2$가 답이 됩니다.

(등차중항을 꼭 적극적으로 활용하세요. $\{a_n\}$에서 $n=$자연수이지만, 이런 식으로 활용할 수도 있다는 것을 익혀주십시오.)

예제 10 2018학년도 6월 모의평가 수학 나형 15번

등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_3=4(a_2-a_1)$, $\sum_{k=1}^{6} a_k = 15$일 때, $a_1+a_3+a_5$의 값은?

$a_1\times a_3=(a_2)^2$이므로 이를 이용하기 위해, $a_3=4(a_2-a_1)$의 양변에 a_1을 곱하여 주면

$a_1a_3=4a_2a_1-4(a_1)^2$이 됩니다. 이를 정리하면

$(a_2)^2-4a_1a_2+4(a_1)^2=0=(a_2-2a_1)^2$이므로 $a_2=2a_1$이므로 공비는 2가 됩니다.

$\sum_{k=1}^{6} a_k=15$이므로 $\frac{a_1(2^6-1)}{2-1}=15$이므로, $a_1=\frac{5}{21}$이 됩니다.

$a_1+a_3+a_5=5$가 답이 됩니다.

(a_1, a_2, a_3를 $a_3=a_1r^2$, $a_2=a_1r$로 정리하여 $a_3=4(a_2-a_1)$에 대입하여도 됩니다.)

예제 11 2019학년도 6월 모의평가 수학 나형 28번

첫째항이 2이고 공비가 정수인 등비수열 $\{a_n\}$과 자연수 m이 다음 조건을 만족시킬 때, a_m의 값을 구하시오.

(가) $4 < a_2 + a_3 \le 12$

(나) $\sum_{k=1}^{m} a_k = 122$

$a_1 = 2$이고 공비를 r이라 합시다. $\sum_{k=1}^{m} a_k = \frac{2(r^m - 1)}{r-1} = 122$이고, $4 < 2r(1+r) \le 12$이므로 $2 < r(1+r) \le 6$이 됩니다.

$2 < r + r^2$를 풀면, $r^2 + r - 2 > 0$이므로 $r < -2$또는 $r > 1$이 되고,

$r^2 + r - 6 \le 0$을 풀면, $-3 \le r \le 2$가 됩니다.

따라서 정수인 r로 가능한 값은 $r = -3, r = 2$가 됩니다.

(i) $r = 2$라면 $\sum_{k=1}^{m} a_k = \frac{2(r^m - 1)}{r-1} = 122$에 대입하여 구하여 보면 $2^m = 62$가 되는데

자연수 m중 이를 만족하는 자연수는 존재하지 않습니다.

(ii) $r = -3$이라면 $\sum_{k=1}^{m} a_k = \frac{2(1 - r^m)}{1-r} = 122$ 대입하면 $(-3)^m = -243$에서 $m = 5$임을 알 수 있습니다. 따라서, $m = 5, r = -3$이므로 $a_m = 2 \times (-3)^4 = 162$가 됩니다.

Point 2 여러 가지 수열의 합

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$을 합의 기호 $\sum$를 통해 $\sum_{k=1}^{n} a_k$라 나타내게 됩니다.

전 단원에서 배운 등차수열과 등비수열 외에도 여러 가지의 수열을 $\sum$를 통해서 나타낼 수 있고 $\sum_{k=1}^{n} a_k = S_n$이라 일반적으로 표현하게 됩니다.

여기서 재미있는 점은 $S_n - S_{n-1} = a_n$이 된다는 점입니다. 다만 조심해야할 점은 S_n에서 n은 자연수이기 때문에 $S_n - S_{n-1} = a_n$이 성립하기 위해서는 $n \geq 2$여야 한다는 점을 조심해야 합니다.

즉, S_n이 주어졌을 때, $S_n - S_{n-1} = a_n$를 이용하여 a_n을 구할 수 있지만, a_1을 대변하지는 못하므로 a_1은 따로 구해주어야 한다는 점이 중요합니다.

이를 등차수열에서 생각을 해보면 초항이 a이고 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여,

$S_n = \dfrac{n(2a+(n-1)d)}{2}$가 됩니다.

따라서 $S_n = an^2 + bn$꼴 이라면 공차 d는 $a = \dfrac{d}{2}$가 됨을 쉽게 알 수 있습니다.

단, 등차수열의 합에서 $S_n = an^2 + bn$꼴 이라면 $S_n - S_{n-1} = a_n\ (n \geq 1)$부터 성립하게 되고, $S_n = an^2 + bn + c$라면 $S_n - S_{n-1} = a_n\ (n \geq 2),\ a_1 = S_1$이 된다는 점을 기억해두면 좋습니다.

예를 들어, $S_n = 2n^2 + 4n$이라면 $d = 4$가 되고 $a_1 = 6$이 됨을 쉽게 알 수 있습니다.

예제 1 2018년 전북 10월 교육청 수학 나형 12번

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} a_k = 2a_n - 6$을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{10} \frac{a_n}{2^n}$의 값은?

$S_n = 2a_n - 6$이므로 $S_n - S_{n-1} = a_n = 2a_n - 2a_{n-1}$이므로 $a_n = 2a_{n-1}$이 됩니다.

(단, $n \geq 2$)

$\sum_{k=1}^{n} a_k = 2a_n - 6$에 $n = 1$을 대입하면, $a_1 = 2a_1 - 6$이므로 $a_1 = 6$이 되고,

$a_n = 6 \times 2^{n-1}$가 됩니다.

따라서 구하고자 하는 답은 $\sum_{n=1}^{10} \frac{a_n}{2^n} = \sum_{n=1}^{10} 3 = 30$입니다.