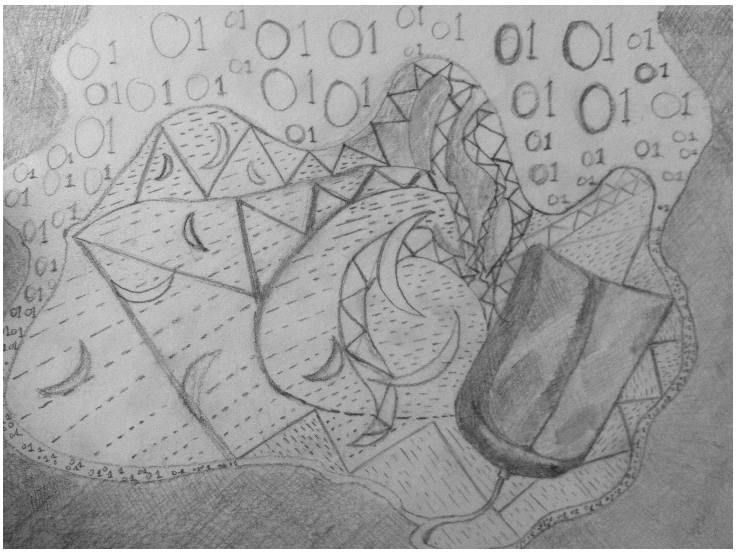
(2015개정 교육과정)

아르코 수학 I



arco 지음

"아르코 수학 기본서를 소개하겠습니다."

이 책의 목적은 어떻게 하면 좀 더 개념과 문제간의 괴리감을 줄일 수 있을까? 의문에서 출발했습니다. 개념설명을 숙지하고 유형별 문제를 풀더라도 연습문제에서는 풀지 못하는 경우가 많았기 때문입니다. 그래서 단계별 구성과 그에 맞는 적절한 예제를 배치한 것이 아니라 단계별 확인이 아닌 개념, 예제, 개념check, 개념연습, 실력연습문제 문항의 구성에 일정 난이도를 유지하게 했으며 일정 난이도를 유지할 때 발생될 수 있는 문제에 대한 이해도를 높이기 위해서 '개념길잡이'라는 것을 예제 밑에 배치하여 개념, 예제 내용에서 발생할 수 있는 추가 의문점을 해결하게 했습니다. 물론 단원 별 특징에 따라 '개념길잡이' 멘트에 차이는 있겠지만 되도록 연습문제를 접하게 됐을 때, 문제에 대해 접근을 못하는 것을 줄이기 위해 노력했습니다. 또한 단순 개념 확인의 선택형 문제를 제와한 전 문항을 주관식으로 구성하였습니다. 그리고 해설의 경우도 답에 도출에 있어서 상세히 기술하여 중간에서 막히는 일이 없도록 했으며, 예제 및 개념체크, 개념연습, 실력연습에서의 해설은 단순계산도 친절하게 하려고 했습니다. 개념에 대한 설명에 있어서도 방정식이라도 그래프적인 설명이 필요한 경우 추가 설명을 하여 방정식을 통해 이미지가 그려지도록 하려 했습니다.

[목차]

6. 지수를 유리수의 범위까지 확장
밑이 양수일 때, 지수가 유리수인 경우에도 지수가 정수일 때와 마찬가지로 지수법칙이 성립하도록 지수의 범위를 확장하여 보자.

$a>0, b>0$일 때 유리수 m, n에 대하여

(1) $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

$a>0$일 때, 유리수 p, q에 대하여 지수법칙 $(a^p)^q = a^{pq}$이 성립한다고 하면

유리수 $\frac{m}{n}$ (m, n은 정수, $n \geq 2$)에 대하여

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^{\frac{m}{n} \cdot n} = a^m$$

이때, $a>0$이므로 $a^{\frac{m}{n}} > 0$이다.

따라서 $a^{\frac{m}{n}}$은 a^m의 양의 n제곱근이므로

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

(2) $a^r a^s = a^{r+s}$

$r = \frac{m}{n}$, $s = \frac{p}{q}$ (m, p는 정수, n, q는 2 이상의 자연수)로 놓으면

$a^r a^s = a^{\frac{m}{n}} a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[nq]{a^{mq}} \sqrt[nq]{a^{np}}$

여기서 mq, np는 정수이고 $a^{mq} > 0$, $a^{nq} > 0$이므로

$$a^r a^s = \sqrt[nq]{a^{mq}} \sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq} a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}} = a^{\frac{mq+np}{nq}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}} = a^{r+s}$$

따라서 $a^r a^s = a^{r+s}$이 성립한다.

(3) $a^r \div a^s = a^{r-s}$

$r = \frac{m}{n}$, $s = \frac{p}{q}$ (m, p는 정수, n, q는 2 이상의 자연수)로 놓으면

$$a^{-s} = a^{-\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^{-p}} = \sqrt[q]{\frac{1}{a^p}} = \frac{1}{\sqrt[q]{a^p}} = \frac{1}{a^{\frac{p}{q}}} = \frac{1}{a^s}$$

이므로 $a^r \div a^s = a^r \times \frac{1}{a^s} = a^r a^{-s} = a^{r-s}$

(4) $(a^r)^s = a^{rs}$

$r = \frac{m}{n}$, $s = \frac{p}{q}$ (m, p는 정수, n, q는 2 이상의 자연수)로 놓으면

$$(a^r)^s = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^p} = \sqrt[q]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p} = \sqrt[q]{\sqrt[n]{a^{mp}}} = \sqrt[nq]{a^{mp}} = a^{\frac{mp}{nq}} = a^{\frac{m}{n} \times \frac{p}{q}} = a^{rs}$$

(5) $(ab)^r = a^r b^r$

$r = \frac{m}{n}$, $s = \frac{p}{q}$ (m, p는 정수, n, q는 2 이상의 자연수)로 놓으면

$(ab)^r = (ab)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(ab)^m} = \sqrt[n]{a^m b^m} = \sqrt[n]{a^m}\sqrt[n]{b^m} = a^{\frac{m}{n}} b^{\frac{m}{n}} = a^r b^r$

7. 지수를 실수의 범위까지 확장

지수의 범위를 실수까지 확장하기 위하여 지수가 무리수인 $2^{\sqrt{3}}$을 예로 들어 보면
무리수 $\sqrt{3} = 1.7320508075\cdots\cdots$에 대하여 $\sqrt{3}$에 한없이 가까워지는 유리수
1, 1.7, 1.73, 1.732, 1.7320, 1.73205, $\cdots\cdots$를 지수로 가지는 수
2^1, $2^{1.7}$, $2^{1.73}$, $2^{1.732}$, $2^{1.7320}$, $2^{1.73205}$, $\cdots\cdots$은 일정한 수에 한없이 가까워짐을 알 수 있다.
이 일정한 수를 $2^{\sqrt{3}}$이라고 정의한다. 이와 같은 방법을 이용하면 $a > 0$일 때, 임의의 실수 x에 대하여도 a^x을 정의할 수 있다.
에를 들면 $a > 0$, $b > 0$일 때, $\left(a^{\sqrt{3}} b^{\sqrt{5}}\right)^{\sqrt{15}} = a^{\sqrt{45}} b^{\sqrt{75}} = a^{3\sqrt{5}} b^{5\sqrt{3}}$으로 나타낼 수 있다.

㉠ 정수 지수로의 확장
0 또는 음의 정수인 지수
$a \neq 0$이고 n이 양의 정수일 때, $a^0 = 1$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

㉡ 지수가 정수일 때의 지수법칙
$a \neq 0$, $b \neq 0$이고 m, n이 정수일 때

① $a^m a^n = a^{m+n}$ ② $(a^m)^n = a^{mn}$, $(a^n)^m = a^{mn}$

③ $(ab)^n = a^n b^n$ ④ $a^m \div a^n = a^{m-n}$

㉢ 유리수인 지수
$a > 0$이고 m이 정수, n이 2이상인 정수일 때
$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, 특히 $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

㉣ 지수가 유리수일 때의 지수법칙
$a > 0$, $b > 0$이고 r, s가 유리수일 때

① $a^r a^s = a^{r+s}$ ② $(a^r)^s = a^{rs}$

③ $(ab)^r = a^r b^r$ ④ $a^r \div a^s = a^{r-s}$

㉤ $a > 0$, $b > 0$이고 x, y가 실수일 때

① $a^x a^y = a^{x+y}$ ② $(a^x)^y = a^{xy}$

③ $(ab)^x = a^x b^x$ ④ $a^x \div a^y = a^{x-y}$

8. 양의 실수를 유리수인 지수로 나타내기

a, b는 자연수, m, $n\neq 0$인 정수, x, y는 실수일 때

$a^m=x$, $b^n=y$이면 $a=x^{\frac{1}{m}}$, $b=y^{\frac{1}{n}}$으로 바꾸어 a와 b를 실수 x와 y에 관한 식으로 나타낼 수 있다.

예를 들면 $8^{\frac{2}{3}}=x$, $27^{\frac{3}{4}}=y$일 때, $8^{\frac{2}{3}}=\left(2^3\right)^{\frac{2}{3}}=2^2=x$이므로

$2=x^{\frac{1}{2}}$, $27^{\frac{3}{4}}=\left(3^3\right)^{\frac{3}{4}}=3^{\frac{9}{4}}$에서 $3=y^{\frac{4}{9}}$으로 나타낼 수 있다.

즉, $2=x^{\frac{1}{2}}$, $3=y^{\frac{4}{9}}$을 이용하여 $108^{\frac{1}{2}}=\left(2^2\times 3^3\right)^{\frac{1}{2}}=2^{2\times\frac{1}{2}}\times 3^{3\times\frac{1}{2}}=2\times 3^{\frac{3}{2}}=x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{3}}$꼴로 나타낼 수 있다. 문제에서는 실수 $(xy)^n$꼴을 물어본다.

9. 지수법칙과 곱셈공식의 곱셈공식 이용 및 응용

① $a>0$, $b>0$이고 x, y가 실수일 때,

곱셈공식 $\left(a^{2x}-b^{2x}\right)=\left(a^x+b^y\right)\left(a^x-a^y\right)$, $\left(a^x\pm y^y\right)^2=a^{2x}\pm 2a^xb^y+y^{2y}$,

$\left(a^x\pm b^y\right)^3=a^{3x}\pm 3a^{2x}b^y+3a^xb^{2y}\pm b^{3y}$을 이용한다.

예를 들면 $a>0$일 때,

$$(a^{\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}})^3-(a^{\frac{1}{3}}-a^{-\frac{1}{3}})^3=a+3a^{\frac{2}{3}}a^{-\frac{1}{3}}+3a^{\frac{1}{3}}a^{-\frac{2}{3}}+a^{-1}-a+3a^{\frac{2}{3}}a^{-\frac{1}{3}}-3a^{\frac{1}{3}}a^{-\frac{2}{3}}+a^{-1}$$

$$=a^{-1}+a^{-1}+3a^{\frac{1}{3}}+3a^{\frac{1}{3}}=2a^{-2}+6a^{\frac{1}{3}}$$

으로 간단히 식을 나타낼 수 있다.

② $a>0$이고 실수 x에 대하여 a^x+a^{-x} 꼴이 주어지는 경우 곱셈공식에서

$a^{2x}+a^{-2x}=\left(a^x+a^{-x}\right)^2-2a^{2x-2x}=\left(a^x+a^{-x}\right)^2-2$

$\left(a^x+a^{-x}\right)^3=a^{3x}+3a^{2x}a^{-x}+3a^xa^{-2x}+a^{-3x}=a^{3x}+a^{-3x}+3a^x+3a^{-x}$에서

$a^{3x}+a^{-3x}=\left(a^x+a^{-x}\right)^3-3\left(a^x+a^{-x}\right)$꼴로 나타낸다.

예를 들면 $3^{2x}+3^{-2x}=11$일 때,

$3^{2x}+3^{-2x}=\left(3^x+3^{-x}\right)^2-2$에서 $3^x+3^{-x}=3^{2x}+3^{-2x}+2=11+2=13$이고

$(2^{\frac{x}{2}}+2^{-\frac{x}{2}})^2=2^x+2+2^{-x}=2^x+2^{-x}+2=11+2=13$, $2^{\frac{x}{2}}+2^{-\frac{x}{2}}=\pm\sqrt{13}$

$2^{\frac{x}{2}}+2^{-\frac{x}{2}}>0$이므로 $2^{\frac{x}{2}}+2^{-\frac{x}{2}}=\sqrt{13}$

문제에서 $\dfrac{3^x+3^{-x}}{3^{\frac{x}{2}}+3^{-\frac{3}{2}}}=\dfrac{13}{\sqrt{13}}=13\sqrt{13}$으로 간단히 나타낼 수 있다.

하지만 조건에서 $a>0$이고 p는 실수인 경우, $a^x=p$로 조건이 주어지면

$\dfrac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}$ 꼴의 경우에는 분모와 분자에 각각 a^x을 곱해준다.

즉, $\dfrac{(a^x - a^{-x})a^x}{(a^x + a^{-x})a^x} = \dfrac{a^{2x}-1}{a^{2x}+1} = \dfrac{p-1}{p+1}$꼴로 나타낼 수 있다.

10. 밑을 통일하여 식의 값 구하기
밑을 같게 하여 지수 법칙을 이용한다.
예를 들면 두 실수 x, y, p에 대하여 $ab = 5^p$이고, $a^x = 25$, $b^y = 125$이면
$a^x = 25 = 5^2$, $a = 5^{\frac{2}{x}}$이고 $b^y = 125 = 5^3$, $b = 5^{\frac{3}{y}}$이 되어 $ab = 5^{\frac{2}{x}+\frac{3}{y}}$꼴이 된다.
즉, $ab = 5^p$이므로 $5^p = 5^{\frac{2}{x}+\frac{3}{y}}$에서 $\dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y} = p$로 나타낼 수 있다.

(기본확인)

6. 다음 값을 구하시오.

(1) $9^{\frac{3}{2}}$　　(2) $(17)^0$　　(3) $32^{-\frac{2}{3}}$　　(4) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-5}$

(5) $81^{0.5}$　　(6) $729^{1.25}$　　(7) $\left(\sqrt[3]{5}\right)^6$

7. 다음 식을 간단히 하시오.(단, $a \neq 0$, $b \neq 0$)

(1) $4^8 \times 2^{-10}$　　(2) $5^3 \div 5^{-2} \times 5^{-6}$　　(3) $\left(a^4 b^{-12}\right)^{\frac{3}{4}}$

(4) $\left(a^{-8} \div a^2\right)^{-4} \times a^3$　　(5) $\dfrac{\left(a^{-3}\right)^2 \times \left(a^2\right)^3}{a^{-5} \times a^7}$

8. 다음을 a^r꼴로 나타내시오.(단, $a>0$, r는 유리수이다.)

(1) $\sqrt[5]{a}$　　(2) $\sqrt[20]{a^{15}}$　　(3) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{a^7}}$　　(4) $\dfrac{\sqrt[9]{a}}{\sqrt[9]{a^5}}$

9. 다음 식을 간단히 하시오.(단, $a>0$, $b>0$)

(1) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt[5]{a}}}$　　(2) $\left(a^{\frac{1}{5}} - b^{\frac{1}{5}}\right)\left(a^{\frac{2}{5}} + a^{\frac{1}{5}} b^{\frac{1}{5}} + b^{\frac{2}{5}}\right)$　　(3) $3^{\sqrt{8}} \times 3^{\sqrt{32}}$

(4) $\left(16^{\sqrt{125}}\right)^{-\frac{1}{\sqrt{5}}}$　　(5) $\left(a^{\sqrt{3}} b^{\sqrt{7}}\right)^{\sqrt{21}}$　　(6) $5^{\pi+9} \div 5^{\pi-9}$

10. $a^{-2}=5$일 때, $\dfrac{a^3-a}{a-a^{-3}}$의 값을 구하시오. (단, $a>0$)

11. 다음 계산 과정 중에서 처음으로 등호가 잘못 사용된 부분을 구하시오.

$$
\begin{aligned}
\sqrt{\sqrt{(-5)^4 \times (-5)^8}} &= \sqrt{\sqrt{(-5)^{12}}} && \Leftarrow ㉠ \\
&= \sqrt[4]{(-5)^{12}} && \Leftarrow ㉡ \\
&= (-5)^{\frac{12}{4}} && \Leftarrow ㉢ \\
&= (-5)^3 && \Leftarrow ㉣ \\
&= -125 && \Leftarrow ㉤
\end{aligned}
$$

(길잡이 예제3) 지수가 확장된 거듭제곱근의 계산

다음 식을 간단히 구하시오.

(1) $\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{4}}\times\left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{1}{6}}$ (2) $\{(-3)^2\}^{\frac{3}{2}}-81^{\frac{3}{4}}\times 4^{\frac{1}{2}}$ (3) $\frac{\sqrt[6]{8}\times\sqrt[12]{9}}{\sqrt[6]{81}}$

[풀이] (1) $\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{4}}\times\left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{1}{6}}=\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^2\right\}^{\frac{3}{4}}\times\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^3\right\}^{-\frac{1}{6}}$

$$=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\times\left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}=\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$$

(2) $\{(-3)^2\}^{\frac{3}{2}}-81^{\frac{3}{4}}\times 4^{\frac{1}{2}}=(3^2)^{\frac{3}{2}}-(3^4)^{\frac{3}{4}}\times(2^2)^{\frac{1}{2}}$

$$=3^{2\times\frac{3}{2}}-3^{4\times\frac{3}{4}}\times 2^{2\times\frac{1}{2}}$$

$$=3^3-3^3\times 2=27-54=-27$$

(3) $\frac{\sqrt[6]{8}\times\sqrt[12]{9}}{\sqrt[6]{27}}=(2^3)^{\frac{1}{6}}\times(3^2)^{\frac{1}{12}}\div(3^4)^{\frac{1}{6}}$

$$=2^{\frac{1}{2}}\times 3^{\frac{1}{6}}\div 3^{\frac{2}{3}}=2^{\frac{1}{2}}\times 3^{-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

(개념 길잡이) 거듭제곱근은 지수가 실수 범위에서 까지 확장이 가능합니다. 이 때 지수가 자연수일 경우는 상관이 없지만 지수가 실수 범위에서는 밑이 0보다 크다는 사실에 유의해서 풀어야 합니다. 즉 예제(2)와 같이 $(-3)^2$에서 -3지수는 0보다 작으므로 $(-3)^2=9=3^2$으로 변형한 뒤에 계산을 해 줘야 됩니다. 변형하지 않고 계산하게 되면 $(-3)^{2\times\frac{3}{2}}=(-3)^3=-27$이 되어 잘못된 값을 유도하게 됨에 주의해야 됩니다.

(개념Check)3. (1) $(\sqrt{a^3}\times\sqrt[4]{a}\times a^{-\frac{1}{2}})^{\frac{2}{5}}$을 간단히 구하시오. (단, $a>0$)

(2) $(\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{(-5)^2}-\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4})$을 간단히 구하시오.

(3) $(2^{5+\sqrt{5}}+2^{5-\sqrt{5}})^2-(2^{5+\sqrt{5}}-2^{5-\sqrt{5}})^2$을 간단히 구하시오.

(길잡이 예제4) 거듭제곱근의 활용

(1) $\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{4}{n}}$과 $81^{\frac{1}{n}}$의 값이 모두 자연수가 되도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오.

(2) 3의 네제곱근 중 양수인 것을 x값이라고 할 때, x^n이 두 자리 자연수가 되도록 하는 모든 자연수 n의 값을 구하시오.

[풀이] (1) $\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{4}{n}}=(2^{-x})^{-\frac{4}{n}}=2^{\frac{12}{n}}$

$\therefore\ 81^{\frac{1}{n}}=(3^4)^{\frac{1}{n}}=3^{\frac{4}{n}}$

즉, $2^{\frac{12}{n}}$, $3^{\frac{4}{n}}$이 모두 자연수가 되기 위해서는 자연수 n이 2와 4의 최대공약수 의 약수가 되어야 한다.

따라서 최대공약수는 4이므로 4의 약수는 1, 2, 4이고 그 합은 $1+2+4=7$

(2) 3의 네제곱근은 $x^4=3$으로 나타낼 수 있고, $x=3^{\frac{1}{4}}$이다.

$x^n=3^{\frac{n}{4}}$이고 두 자리 자연수가 되기 위한 n의 값은

$x^{12}=3^{\frac{12}{4}}=3^3=27$

$x^{16}=3^{\frac{16}{4}}=3^4=81$ 이므로 $n=12,\ 16$

(개념 길잡이) 거듭제곱근이 자연수가 되기 위해서는 지수가 음이 아닌 정수가 되어야 합니다. (지수가 0이어도 값은 1이 되기 때문에) 위에 식을 보면 지수가 분수 꼴로 되어 있고 분자가 상수 분모가 미지수입니다. 그래서 분모가 분자의 약수면 자연수가 됩니다.

두 식을 만족하기 위해선 분자들의 최대 공약수의 약수로 n값을 구해줍니다. 반대로 분모가 상수이고 분자가 미지수로 되어있다면 분모의 최소공배수의 배수로 n값을 구해주면 됩니다.

(개념Check)4. n이 2이상의 자연수일 때, a의 n제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f(a,\ n)$라 하자. 이 때, $f(5,\ 2)+f(5,\ 3)+f(5,\ 4)+\ \cdots\ +f(5,\ k)=15$ 를 만족하는 자연수 k의 값을 구하시오.

(길잡이 예제5) 지수법칙과 곱셈공식을 이용한 계산

$a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=3$일 때, 다음 식의 값을 구하여라. (단, $a>0$)

(1) $a+a^{-1}$　　　(2) a^2+a^{-2}　　　(3) $a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}$

[풀이] (1) $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=3$의 양변을 제곱하면

$a+2+a^{-1}=9$

$\therefore\ a+a^{-1}=7$

(2) $a+a^{-1}=7$의 양변을 제곱하면

$a^2+2+a^{-2}=49$

$\therefore\ a^2+a^{-2}=47$

(3) $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=3$의 양변을 세제곱하면

$(a^{\frac{1}{2}})^3+(a^{-\frac{1}{2}})^3+3\times a^{\frac{1}{2}}\times a^{-\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})=27$

$a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}+3\times 1\times 3=27$

$\therefore\ a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}=18$

(개념 길잡이) 곱셈공식에서 자주 등장하는 합, 차, 곱의 연산입니다. 합, 차, 곱 중 2가지 값을 알면 다른 값을 구할 수 있고, 그것들의 제곱, 세제곱 식도 구할 수 있습니다. 특히 지수에서 역수꼴의 곱이 주어져 있지 않아도 $a^x\times a^{-x}=1$이라는 것을 알 기 때문에 역수의 합이나 차만 주어지는 경우가 많습니다.

(개념Check)5. 양수 x에 대하여 $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=4$일 때, $\dfrac{x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}+2}{x^2+x^{-2}+3}$의 값을 구하시오.

(개념check)6. $\sqrt{a}-\dfrac{1}{\sqrt{a}}=3$일 때, $\dfrac{a^{\frac{3}{2}}-a^{-\frac{3}{2}}-7}{a+a^{-1}+5}$의 값을 구하시오. (단, $a>0$)

(길잡이 예제6) 지수법칙과 곱셈공식의 응용

(1) $x=2^{\frac{1}{3}}+2^{-\frac{1}{3}}$일 때, x^3-3x의 값을 구하시오.

(2) $x=\dfrac{3^{\frac{1}{n}}+3^{-\frac{1}{n}}}{2}$일 때, $(x+\sqrt{x^2-1})^n$의 값을 구하시오.

[풀이] (1) $x=2^{\frac{1}{3}}+2^{-\frac{1}{3}}$의 양변을 세제곱하면

$$x^3=(2^{\frac{1}{3}})^3+3\times(2^{\frac{1}{3}})^2\times2^{-\frac{1}{3}}+3\times2^{\frac{1}{3}}\times(2^{-\frac{1}{3}})^2+(2^{-\frac{1}{3}})^3$$

$$=2+3\times2^{\frac{2}{3}-\frac{1}{3}}+3\times2^{\frac{1}{3}-\frac{2}{3}}+2^{-1}$$

$$=2+3\times2^{\frac{1}{3}}+3\times2^{-\frac{1}{3}}+\frac{1}{2}$$

$$=2+3(2^{\frac{1}{3}}+2^{-\frac{1}{3}})+\frac{1}{2}$$

$$=2+\frac{1}{2}+3x$$

$$\therefore\ x^3-3x=(2+\frac{1}{2}+3x)-3x=\frac{5}{2}$$

(2) $x=\dfrac{3^{\frac{1}{n}}+3^{-\frac{1}{n}}}{2}$의 양변을 제곱하면

$$x^2=\frac{(3^{\frac{1}{n}})^2+2\times3^{\frac{1}{n}}\times3^{-\frac{1}{n}}+(3^{-\frac{1}{n}})^2}{4}=\frac{(3^{\frac{1}{n}})^2+(3^{-\frac{1}{n}})^2+2}{4}$$ 에서 1을 빼면

$$x^2-1=\frac{(3^{\frac{1}{n}})^2+(3^{-\frac{1}{n}})^2+2}{4}-1$$

$$=\frac{(3^{\frac{1}{n}})^2+(3^{-\frac{1}{n}})^2+2}{4}-\frac{4}{4}$$

$$=\frac{(3^{\frac{1}{n}})^2+(3^{-\frac{1}{n}})^2-2}{4}$$

$$=\frac{(3^{\frac{1}{n}}-3^{-\frac{1}{n}})^2}{4}$$ 이 된다.

주어진 식에 대입하면

$$(x+\sqrt{x^2-1})^n=\left(\frac{3^{\frac{1}{n}}+3^{-\frac{1}{n}}}{2}+\sqrt{\frac{(3^{\frac{1}{n}}-3^{-\frac{1}{n}})^2}{4}}\right)^n$$

$$\left(\frac{3^{\frac{1}{n}}+3^{-\frac{1}{n}}}{2}+\frac{3^{\frac{1}{n}}-3^{-\frac{1}{n}}}{2}\right)^n=(2\times\frac{3^{\frac{1}{n}}}{2})^n=(3^{\frac{1}{n}})^n$$

(개념 길잡이) 지수가 $\frac{1}{3}$이기 때문에 세제곱을 하는 형태이고, 세제곱하면 다시 x가 등장하는 꼴입니다. 이러한 형태는 익숙하게 해 두면 좋습니다. 비슷한 예로 $x=2^{\frac{1}{2}}+2^{-\frac{1}{2}}$일 때, $\sqrt{x^2-4}$를 구하는 꼴이 나옵니다.

제곱을 하게 되면 $x^2=2+2^{-1}+2\times2^{\frac{1}{2}}\times2^{-\frac{1}{2}}$이고 여기서 4를 빼게 된다면 합의 제곱에서 곱의 4를 빼는 효과가 나타나므로 $\sqrt{x^2-4}=2^{\frac{1}{2}}-2^{-\frac{1}{2}}$ 즉, 차의 제곱이 됩니다.

위의 문제 (2) 에서 $x=\frac{3^{\frac{1}{n}}+3^{-\frac{1}{n}}}{2}$를 이용하여 $\sqrt{x^2-1}$의 값을 구하는 것도 같은 유형입니다. 이 문제에서는 분모에 2가 있기 때문에 1만 빼더라도 같은 방식으로 합의 제곱이 차의 제곱으로 바뀜을 알 수 있습니다.

(개념Check)7. $x=\frac{1}{2}(a^{\frac{1}{3}}-a^{-\frac{1}{3}})$일 때, $(x+\sqrt{x^2+1})^3$의 값을 a를 이용하여 나타내시오. (단, $a>0$)

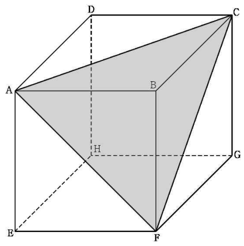
(개념check)8. $\frac{3}{2^{-5}+1}+\frac{3}{2^{-4}+1}+\cdots+\frac{3}{2^0+1}+\cdots+\frac{3}{2^4+1}+\frac{3}{2^5+1}$의 값을 구하시오.

(개념연습)

1. 좌표평면에서 두 점 (2, 0), (0, 4)를 지나는 직선 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$가 등식 $4^a - 2^b = 6$을 만족할 때, $4^a + 2^b$의 값을 구하시오.

2. $\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt[4]{243}}{\sqrt{3}}} \times \sqrt{\dfrac{\sqrt[6]{9}}{\sqrt[12]{81}}} = \sqrt[p]{3^q}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

3. 다음 그림과 같은 정육면체 ABCD－EFGH의 부피가 2^5일 때, 삼각형 AFC의 넓이가 $\sqrt{3}\times 2^{\frac{p}{q}}$이라고 한다. 이때 서로소인 자연수 p, q에 대하여 $p+q$의 값을 구하시오.



4. m, n이 정수일 때, $\left(\dfrac{1}{27}\right)^{\frac{1}{m}} \times \left(\dfrac{1}{64}\right)^{\frac{1}{n}}$이 자연수가 되도록 하는 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수를 구하시오.

5. 실수 x에 대하여 $3^{x+1} - 3^x = a$, $7^{x+1} + 7^x = b$일 때, 63^x을 a, b로 나타내시오.

6. 두 양의 실수 a, b에 대하여 연산 ◈을 $a◈b = \begin{cases} a^{-b} & (a < b) \\ b^{-a} & (a \geq b) \end{cases}$으로 정의할 때, $3◈(\sqrt{2}◈8)$ 의 값을 구하시오.

7. $a = \sqrt[67]{3+\sqrt{2}}$ 일 때, $\dfrac{a + a^2 + a^3 + \cdots + a^{199}}{a^{-2} + a^{-3} + a^{-4} + \cdots + a^{-200}} = m + n\sqrt{2}$이다. 두 유리수 m, n에 대하여 $m+n$의 값을 구하시오.

8. 다음 ‖보기‖ 중 $A = \sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt[4]{b}} \times \sqrt{b}}$ 일 때, A의 값이 자연수가 되게 하는 b의 값의 개수를 구하시오.

‖ 보기 ‖

$1,\ 2^2,\ 3^3,\ 4^4,\ 5^5,\ 6^6,\ 7^7,\ 8^8,\ 9^9,\ 10^{10}$

9. 0이 아닌 세 실수 x, y, z에 대하여 $7^x = 4^y = 686^z$일 때, $\dfrac{3}{x} + \dfrac{a}{y} = \dfrac{1}{z}$을 만족시키는 실수 a 의 값을 구하시오.

(실력연습)

1. $3 \le n \le 300$인 자연수 n에 대하여 $\sqrt[18]{n}$이 어떤 자연수의 n제곱이 되도록 하는 n의 개수를 구하시오.

2. $\sqrt{\frac{n}{2}}$, $\sqrt[3]{\frac{n}{3}}$, $\sqrt[7]{\frac{n}{7}}$이 자연수가 되게 하는 실수 n의 최솟값이 $2^a 3^b 7^c$의 꼴로 나타내어질 때, $a+b+c$의 값을 구하시오. (단, a, b, c는 자연수이다.)

3. $x=3^{\frac{3}{4}}$일 때, $[x+1]+[x^{-1}+1]+\left[\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x^{-1}\right]$의 값을 구하시오.
(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대 정수이다.)

4. $(45)^{\frac{m+1}{2}} \times (\sqrt{5})^{\frac{3m-2}{4}}$이 자연수가 되도록 하는 99이하의 자연수 m의 최댓값을 구하시오.

5. 두 자연수 a, b 가 등식 $(2^a)^a + 16^a = 2^b$ 을 만족시킬 때, $a-b$ 의 값을 구하시오.

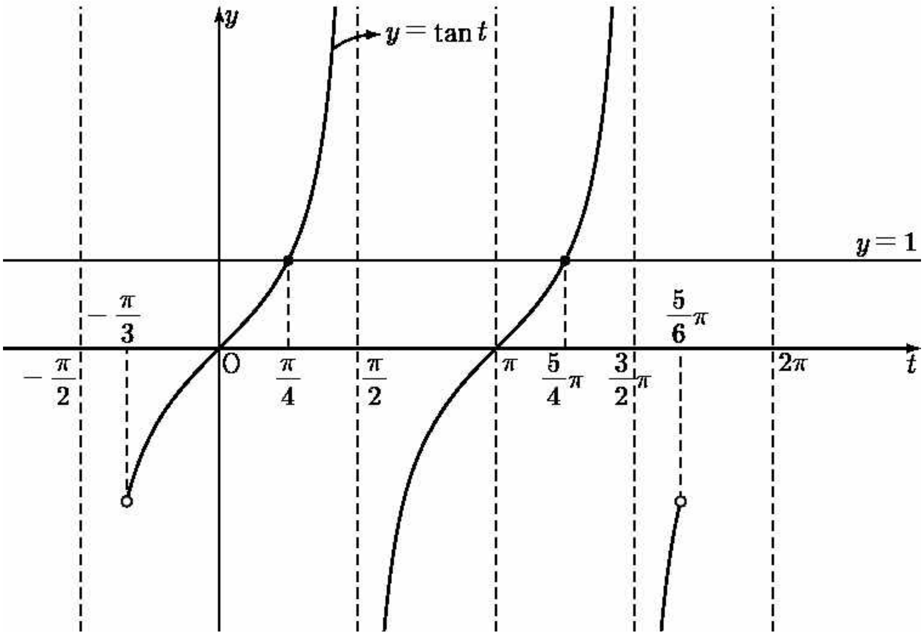
(길잡이예제21) 삼각함수를 포함한 방정식(1)

$0 \le x < 2\pi$일 때, $\tan\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=1$을 만족시키는 모든 x의 값의 합을 구하시오.

[풀이] $x-\frac{\pi}{3}=t$라 하면 $0 \le x < 2\pi$에서 $-\frac{\pi}{3} \le t < \frac{5}{3}\pi$이고

$\tan\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=1$에서 $\tan t=1$이다.

다음 그림과 같이 $-\frac{\pi}{3} \le t < \frac{5}{3}\pi$에서 위의 방정식을 만족시키는 t의 값을 구할 수 있다.



$t=\frac{\pi}{4}$ 또는 $t=\frac{5}{4}\pi$에서 $y=\tan\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$의 그래프와 직선 $y=1$이 만난다.

즉, $x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x-\frac{\pi}{3}=\frac{5}{4}\pi$이므로 $x=\frac{7}{12}\pi$ 또는 $x=\frac{19}{12}\pi$이다.

따라서 $0 \le x < 2\pi$에서 $\tan\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=1$을 만족시키는 x의 값의 합은

$\frac{7}{12}\pi+\frac{19}{12}\pi=\frac{26}{12}\pi=\frac{13}{6}\pi$이다. $\therefore \frac{13}{6}\pi$

[개념길잡이] $\sin(ax+b)$, $\cos(ax+b)$, $\tan(ax+b)$꼴의 항이 포함된 방정식은 $ax+b=t$로 치환하여 식을 간단히 할 수 있습니다. 이 때, x의 범위에 따라 t의 범위를 설정하는 것을 잊지 않도록 해야 합니다.

(개념check)75. $0 \le x < 2\pi$일 때, 방정식 $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)+1=0$을 만족시키는 모든 x의 값의 합을 구하시오.

(개념연습)

80. $0 \le x < 2\pi$일 때, 방정식 $\sqrt{3}\sin x = \cos x$의 두 실근 α, β에 대하여 $\alpha + \beta$의 값을 구하시오. (단, $\alpha < \beta$이다.)

81. $0 \le x < 4$에서 방정식 $\cos\left(x+\frac{1}{3}\right)\pi - \frac{1}{2} = 0$의 모든 실근의 합을 $\frac{q}{p}$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

82. $0 \le x < 2\pi$일 때, 방정식 $|\cos x| + \cos x = 1$의 해를 구하시오.

83. x에 대한 이차방정식 $2x^2 + \sqrt{2}x\sin\theta - 2\cos^2\theta = 0$의 두 근의 차를 $\frac{3}{2}$라 하자. 이를 만족 시키는 θ의 값을 작은 것부터 차례로 a, b, c, d라 할 때, $\cos\left(a+b+\frac{c+d}{2}\right)$의 값을 구하 시오. (단, $0 \le \theta < 2\pi$이다.)

84. $0 \le x < 2\pi$일 때, 부등식 $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(x-\frac{3}{4}\pi\right) < \sqrt{3}$에서의 해의 범위가 $a < x \le b$ 또는 $c < x < d$일 때, $\frac{12(a+b+c+d)}{\pi}$의 값을 구하시오. (단, $a < b \le c < d$이다.)

85. $0 \le x < \pi$일 때, 부등식 $\tan^2 x - \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - 1\right)\tan x < \frac{1}{\sqrt{3}}$의 범위를 구하시오.

86. 모든 실수 x에 대하여 부등식 $3x^2 - 2\sqrt{2}x\cos\theta + \sin\theta > 0$ 이 항상 성립하는 θ의 값의 범위가 $\alpha < \theta < \beta$일 때, $\alpha + \beta$의 값을 구하시오. (단, $0 \le \theta \le 2\pi$)

87. x에 대한 방정식 $x^2 - x\sin\theta = 1 - 2\sin\theta$이 서로 다른 두 실근을 갖고, 그 중 한 근이 0보다 크고 1보다 작을 때, θ의 값을 구하시오. (단, $0 \le x < 2\pi$이다.)

88. $0 \le x < 2\pi$일 때, 부등식 $\frac{\sqrt{3}}{2} < \sin x < \cos x$의 해의 범위가 $a < x < b$일 때, $a+b$의 값을 구하시오.

89. 이차함수 $y = x^2 + x\sin\theta - 2\sin\theta + 2$의 그래프와 직선 $y = -x\sin\theta + \cos^2\theta$가 서로 다른 두 점에서 만날 때, 상수 θ의 범위를 구하시오. (단, $0 \le \theta < 2\pi$이다.)

3. 등비중항

$\mathbf{0}$이 아닌 세 수 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, $\boldsymbol{b}$를 $\boldsymbol{a}$와 $\boldsymbol{c}$의 **등비중항**이라 한다.

이때, 두 양수 a, c의 등비중앙은 $b=\pm\sqrt{ac}$, $b=\sqrt{ac}$일 때 b는 a와 c의 **기하평균**이다.

이 수열의 공비가 r일 때, $r=\dfrac{b}{a}=\dfrac{c}{b}$이므로 $b^2=ac$가 성립한다. 역으로, $b^2=ac$이면 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{c}{b}$가 성립하므로 세 수 a, b, c는 이 순서대로 등비가 $r=\dfrac{b}{a}=\dfrac{c}{b}$인 등비수열을 이룬다.

예를 들면, 다음 그림과 같이 삼각형 ABC에서 각 A의 이등분선이 선분 BC와 만나는 점을 D라 하면 삼각형 ABD, ACD, ABC의 넓이가 이 순서대로 등비수열을 이룬다면

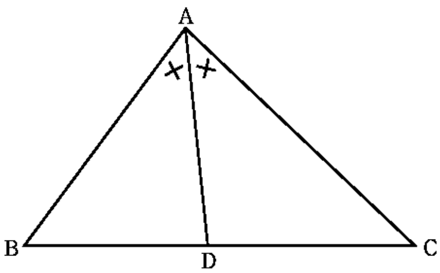
① 삼각형 ABC는 삼각형 ABD k배와 같음

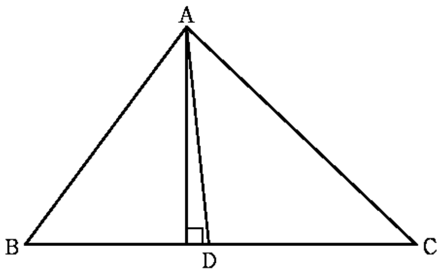
② 삼각형 ABC는 삼각형 ACD k배와 같음

우선 삼각형의 내각의 이등분선의 성질을 살펴보면

삼각형 ABC에서 각 A의 이등분선과 선분 BC의 교점을 D라 할 때, $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BD}}:\overline{\mathrm{CD}}$이 성립함을 이용한다.

$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BD}}:\overline{\mathrm{CD}}=a:at$($a$, t는 양수이다.)라 하면 오른쪽 그림과 같이 점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면





삼각형 ABD의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BD}}\times\overline{\mathrm{AH}}=\dfrac{1}{2}\times a\times\overline{\mathrm{AH}}$

삼각형 ACD의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{CD}}\times\overline{\mathrm{AH}}=\dfrac{1}{2}\times at\times\overline{\mathrm{AH}}$

삼각형 ABC의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BC}}\times\overline{\mathrm{AH}}=\dfrac{1}{2}\times(a+at)\times\overline{\mathrm{AH}}=\dfrac{1}{2}\times a(1+t)\times\overline{\mathrm{AH}}$

즉, 삼각형 ABC의 넓이와 같이 선분 $\overline{\mathrm{BD}}$, $\overline{\mathrm{CD}}$, $\overline{\mathrm{BC}}$도 a, at, $a(1+t)$인 등비수열임을 확인할 수 있다.

그러면 **등비중앙**을 이용하면 $(at)^2 = a \times a(1+t)$로 나타낼 수 있다.

$(at)^2 = a \times a(1+t)$, $a^2t^2 = a^2 + a^2t$, $t^2 - t - 1 = 0$이므로 근의 공식에 의하여

$$t = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$t > 0$, $t = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

①에 대해 보여주기

$$\frac{\text{삼각형 ABC}}{\text{삼각형 ABD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} = \frac{a+at}{a} = 1 + t = 1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

$$\textbf{삼각형 ABC} = \frac{2+\sqrt{5}}{2} \times (\text{삼각형 ABD})$$

②에 대해 보여주기

$$\frac{\text{삼각형 ABC}}{\text{삼각형 ACD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CD}} = \frac{a+at}{at} = \frac{1}{t} + 1 = \frac{2}{1+\sqrt{5}} + 1 = \frac{2+1+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} = \frac{3+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}$$

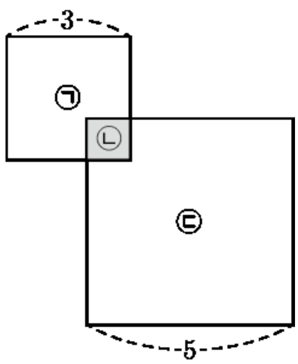
$$\frac{3+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{5}-1)\times(\sqrt{5}+3)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)} = \frac{5+3\sqrt{5}-\sqrt{5}-3}{5-1} = \frac{2+2\sqrt{5}}{4} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\textbf{삼각형 ABC} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \times (\text{삼각형 ACD})$$

(등비수열의 응용)

① 도형과 등비수열

한 변의 길이가 각각 3, 5인 두 개의 정사각형을 겹쳐서 새로운 정사각형을 만든다. 그림과 같이 세 부분을 각각 ㉠, ㉡, ㉢라 할 때, ㉠, ㉡, ㉢의 넓이가 이 순서대로 등비수열을 이루도록 하는 ㉡의 넓이를 구하시오.



(풀이) ㉡이 나타내는 정사각형의 한 변의 길이를 a라 하고, 세 부분 ㉠, ㉡, ㉢의 넓이를 각각 구해보면

㉠의 넓이: $3 \times (3-a) + a \times (3-a) = 3^2 - 3a + 3a - a^2 = 3^2 - a^2$

㉡의 넓이: $a \times a = a^2$

㉢의 넓이: $5 \times (5-a) + a \times (5-a) = 5^2 - 5a + 5a - a^2 = 5^2 - a^2$

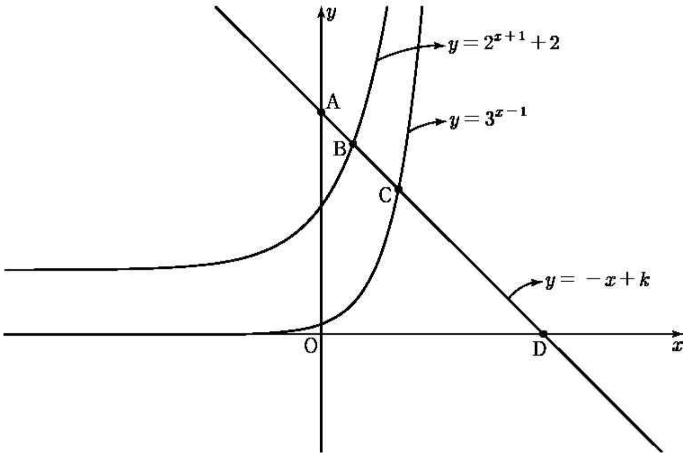
즉, $3^2 - a^2$, a^2, $5^2 - a^2$임을 알 수 있다.

문제의 조건에서 ㉠, ㉡, ㉢의 넓이가 이 순서대로 등비수열을 이루므로 등비중앙에 의해서 $(a^2)^2 = (3^2 - a^2) \times (5^2 - a^2)$로 나타낼 수 있다.

$a^4 = a^4 - 8a^2 + 3^2 \times 5^2$, $8a^2 = 225$에서 $a^2 = \dfrac{225}{8}$, ㉡의 넓이는 $\dfrac{225}{8}$이다.

② 좌표평면에서 직선과 곡선의 만남, 등비수열

그림과 같이 좌표평면 위의 직선 $y = -x + k$가 y축, 두 곡선 $y = 2^{x+1} + 2$, $y = 3^{x-1}$ 및 x축과 만나는 점을 각각 A, B, C, D라 할 때, $\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{BC}}$, $\overline{\mathrm{CD}}$가 이 순서대로 등비수열을 이룬다고 한다면



$\overline{\mathrm{AB}} + \overline{\mathrm{BC}} + \overline{\mathrm{CD}} = \overline{\mathrm{AD}}$와 직선 $y = -x + k$에서 점 A$(0, -k)$, 점 D$(k, 0)$에서 $\overline{\mathrm{AD}}$의 길이는 $\overline{\mathrm{AD}} = \sqrt{k^2 + k^2} = \sqrt{2}k$임을 알 수 있다.

만약 $\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{2}$로 주어지면 $\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{BC}}$, $\overline{\mathrm{CD}}$가 이 순서대로 등비수열을 이룬다고 했으므로 공비를 r로 하면 $\overline{\mathrm{BC}} = \sqrt{2}r$, $\overline{\mathrm{CD}} = \sqrt{2}r^2$이 된다.

$\overline{\mathrm{AB}} + \overline{\mathrm{BC}} + \overline{\mathrm{CD}} = \overline{\mathrm{AD}}$에서 $\sqrt{2} + \sqrt{2}r + \sqrt{2}r^2 = \sqrt{2}(1 + r + r^2) = \sqrt{2}k$

$1 + r + r^2 = k$ 로 나타낼 수 있다.

(개념연습)

130. $p=3^{100}, q=5^{100}$에 대하여 15^{100}의 약수의 총합을 p, q로 나타내시오.

131. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1+a_2+a_3=4, a_4+a_5+a_6=12$일 때, $a_7+a_8+a_9+\cdots+a_{27}$의 값을 구하시오.

132. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\left\{3a_n-\frac{1}{2}a_{n+1}\right\}$은 첫째항이 $\frac{1}{3}$이고 공비가 2인 등비수열일 때, 등비수열 $\{a_n\}$의 $S_1+S_2+S_3+\ \cdots\ +S_{20}$값을 구하시오.

133. 공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n라 할 때,
$a_2=\frac{3}{2}$, $S_4=\frac{45}{4}$를 만족시키는 모든 r의 값의 합을 구하시오.

134. 다항식 $1+x+x^2+\ \cdots\ x^{2018}+x^{2019}$을 $x-\frac{1}{2}$로 나눈 몫을 $f(x)$라 할 때, $f(1)$의 값을 구하시오.

135. 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에서 $a_2+a_4=15$, $a_4+a_6=135$이고 이 수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, S_{10}의 값을 구하시오.

136. 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때,
$S_{10}=15$, $S_{20}=45$이다. 이때 S_{30}의 값을 구하시오.

137. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n=\log(2n+1)^{100}$일 때, a_4+a_{16}의 값을 다음 상용로그 표를 이용하여 구하시오.

수	0	1	⋯	4	5	⋯	7	8
1.0	.0000	.0043	⋯	.0170	.0212	⋯	.0294	.0334
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.2	.0792	.0828	⋯	.0934	.0969	⋯	.1038	.1072
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.4	.1461	.1492	⋯	.1584	.1614	⋯	.1673	.1703

(실력연습)

31. 두 비커 A, B에 농도가 같은 소금물이 각각 같은 양만큼 들어 있다. A비커의 소금물의 양의 $\frac{1}{2}$을 버린 후 버린 양만큼 물을 섞는 시행을 m번 반복하고, B비커의 소금물의 양의 $\frac{3}{4}$을 버린 후 버린 양만큼 물을 섞는 시행을 n번 반복했을 때, 두 비커의 소금물의 농도가 같아졌다면 $\frac{m}{n}$의 값을 구하시오.

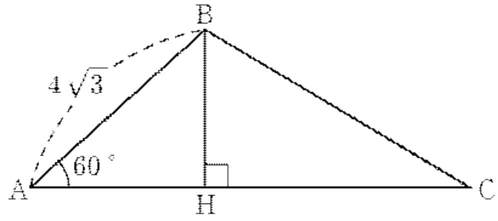
32. 세 짝수 a, b, c가 이 순서대로 등비수열을 이루고, $a+b+c=56$일 때, a의 값을 구하시오. (단, $a<b<c$이다.)

[해설 일부분]

92. 그림에서 $\overline{AC} = \overline{AH} + \overline{HC}$ 이므로

$\overline{AH} = 4\sqrt{3}\cos 60^\circ = 4\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = 2\sqrt{3}$ 임을 알 수 있다.

$\overline{HC} = \overline{BC}\cos C$ 이므로



사인법칙을 이용하면 $\frac{\overline{BC}}{\sin 60^\circ} = 2\times 6$, $\overline{BC} = \sin 60^\circ \times 2 \times 6 = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 \times 6 = 6\sqrt{3}$

같은 방식으로 $\frac{4\sqrt{3}}{\sin C} = 2\times 6$, $\sin C = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\cos C = \sqrt{1-\sin^2 C} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

이때, $\cos C = \frac{\sqrt{6}}{3}$ 은 조건 $0^\circ < C < 90^\circ$ 에서 $0 < \cos C < 1$ 을 만족하므로

$\therefore \ \cos C = \frac{\sqrt{6}}{3}$

따라서 $\overline{AC} = \overline{AH} + \overline{HC} = 2\sqrt{3} + 6\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} + 6\sqrt{2}$ $\qquad \therefore \ 2\sqrt{3}+6\sqrt{2}$

93. 평행사변형 ABCD의 넓이는 $2\times\left(\frac{1}{2}\times 4\times 5\times \sin 60^\circ\right) = 2\times\left(\frac{1}{2}\times 4\times 5\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 10\sqrt{3}$

삼각형 ABC에서 $\overline{AC}^2 = 5^2 + 4^2 - 2\times 5\times 4\times\cos 60^\circ = 25 + 16 - 40\times\frac{1}{2} = 21$

그런데 $\overline{AC} > 0$ 이므로 $\overline{AC} = \sqrt{21}$

삼각형 BCD에서 $C = 120^\circ$ 이므로

$\overline{BD}^2 = 4^2 + 5^2 - 2\times 4\times 5\times\cos 120^\circ = 16 + 25 - 2\times 4\times 5\times\left(-\frac{1}{2}\right) = 61$

그런데 $\overline{BD} > 0$ 이므로 $\overline{BD} = \sqrt{61}$

따라서 평행사변형 ABCD는 두 대각선의 길이가 각각 $\sqrt{21}$, $\sqrt{61}$ 이고, 두 대각선이 이루는 각의 크기가 θ 이므로

$\frac{1}{2}\times\sqrt{21}\times\sqrt{61}\times\sin\theta = 10\sqrt{3}$,

$\sin\theta = \frac{2\times 10\sqrt{3}}{\sqrt{21}\times\sqrt{61}} = \frac{2\times 10\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{7}\times\sqrt{61}} = \frac{20}{\sqrt{7}\times\sqrt{61}} = \frac{20}{\sqrt{427}} = \frac{20\sqrt{427}}{427}$

따라서 $\sin\theta = \dfrac{20\sqrt{427}}{427}$이다. $\therefore$ $\dfrac{20\sqrt{427}}{427}$

94. $\sin A + \sin B = \sin C(\cos A + \cos B)$에서 사인법칙과 코사인법칙을 이용하면

$\dfrac{a}{\sin A} = 2R$, $\sin A = \dfrac{a}{2R}$이고 $\dfrac{b}{\sin B} = 2R$, $\sin B = \dfrac{b}{2R}$이고 $\dfrac{c}{\sin C} = 2R$, $\sin C = \dfrac{c}{2R}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$, $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$, $c^2 = b^2 + a^2 - 2ba\cos C$이므로

$\therefore$ $\dfrac{a}{2R} + \dfrac{b}{2R} = \dfrac{c}{2R}\left(\dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}\right)$

$\dfrac{a}{2R} + \dfrac{b}{2R} = \dfrac{c}{2R}\left(\dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}\right)$, $a + b = c\left(\dfrac{ab^2 + ac^2 - a^3 + bc^2 + ba^2 - b^3}{2abc^2}\right)$

$2a^2bc^2 + 2ab^2c^2 = c(ab^2 + ac^2 - a^3 + bc^2 + ba^2 - b^3)$

$2a^2bc^2 + 2ab^2c = ab^2 + ac^2 - a^3 + bc^2 + ba^2 - b^3$

$2ab(a + b) = ab^2 + c^2a - a^3 + bc^2 + a^2b - b^3$, $a^3 + a^2b + b^3 + ab^2 - ac^2 - bc^2 = 0$

$a^2(a + b) + b^2(a + b) - c^2(a + b) = 0$ $\therefore$ $(a + b)(a^2 + b^2 - c^2) = 0$

그런데 a, b는 변의 길이이므로 $a^2 + b^2 - c^2 = 0$ $\therefore$ $c^2 = a^2 + b^2$

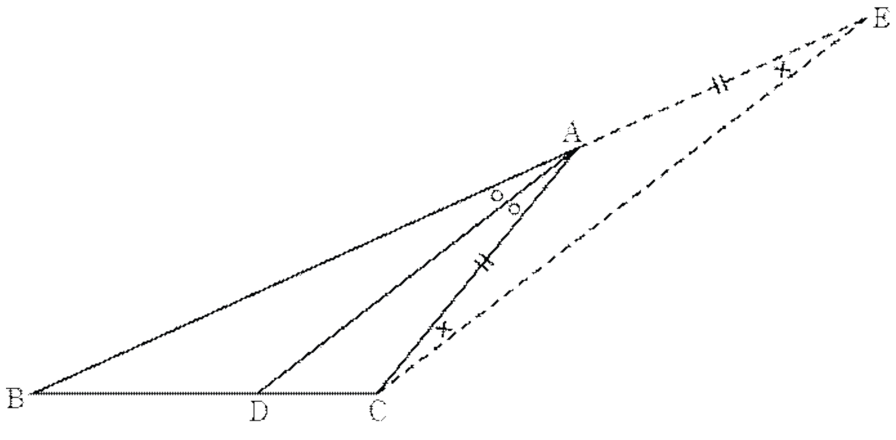
따라서 삼각형 ABC는 ∠ C = 90°인 직각삼각형이다. $\therefore$ ∠ C = 90°인 직각삼각형

95. 점 D가 선분 BC를 3 : 2로 내분하므로 $\overline{\mathrm{BD}} = 3$, $\overline{\mathrm{CD}} = 2$

다음 그림을 통해 $\overline{\mathrm{AD}}$와 $\overline{\mathrm{CE}}$가 평행하고, 선분 AB의 연장선 $\overline{\mathrm{AE}} = \overline{\mathrm{AC}}$이면

$\overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{AC}} = \overline{\mathrm{BD}} : \overline{\mathrm{CD}}$이 성립된다.

즉, $\overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{AC}} = \overline{\mathrm{BD}} : \overline{\mathrm{CD}} = 3 : 2$이 성립하므로 $\overline{\mathrm{AD}}$는 ∠ BAC를 이등분하는 이등분선임을 알 수 있다.



$\overline{\mathrm{AD}} = x$, ∠ ABD = ∠ CAD = α로 놓고 코사인법칙을 이용하면

$3^2 = 6^2 + x^2 - 2 \times 6 \times x \times \cos\alpha$, $\cos\alpha = \dfrac{x^2 + 27}{12x}$

$2^2 = 4^2 + x^2 - 2\times 4\times x\times\cos\alpha$, $\cos\alpha = \dfrac{x^2+12}{8x}$

$\dfrac{x^2+27}{12x} = \dfrac{x^2+12}{8x}$, $2(x^2+12) = x^2+27$, $2x^2+24 = x^2+27$, $x^2 = 3$, $x = \pm\sqrt{3}$

$x > 0$이므로 $x = \sqrt{3}$

따라서 $\overline{\mathrm{AD}} = \sqrt{3}$ $\therefore$ $\overline{\mathrm{AD}} = \sqrt{3}$

96. $a(a^2-c^2) - b(b^2-c^2) = 0$에서 $a^3 - ac^2 = b^3 - bc^2$, $a^3 - b^3 = ac^2 - bc^2$

$a^3 - b^3 = ac^2 - bc^2$에서 $(a-b)(a^2+ab+b^2) = (a-b)c^2$로 나타낼 수 있다.

$a-b \neq 0$이므로 $a^2+ab+b^2 = c^2$

코사인법칙을 이용하면 $c^2 = a^2+b^2-2ab\cos C$

$a^2+ab+b^2 = a^2+b^2-2ab\cos C$

$ab = -2ab\cos C$, $ab \neq 0$이므로 $\cos C = -\dfrac{1}{2}$

$\sin^2 C = 1-\cos^2 C = 1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 = 1+\dfrac{1}{4} = \dfrac{5}{4}$, $\sin C = \pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

$0 < C < \pi$에서 $\sin C > 0$이므로 $\sin C = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

따라서 삼각형 ABC의 넓이 $S = \dfrac{1}{2}ab\times\sin C = \dfrac{1}{2}ab\times\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

$S = \dfrac{\sqrt{5}}{4}ab$ $\therefore$ $\dfrac{\sqrt{5}}{4}ab$

97. $\overline{\mathrm{PB}} = 10\times 70 = 700$, $\overline{\mathrm{PC}} = 10\times 50 = 500$

$\angle\mathrm{PBC} = \theta$라고 하면 삼각형 PBC에서

$\cos\theta = \dfrac{300^2+700^2-500^2}{2\times 300\times 700} = \dfrac{11}{14}$

삼각형 PAB에서

$\cos(\angle\mathrm{PBA}) = \cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta = -\dfrac{11}{14}$이므로

코사인법칙을 이용하면

$\overline{\mathrm{PA}}^2 = 200^2+700^2-2\times 200\times 700\times\left(-\dfrac{11}{14}\right) = 750000$

$\therefore \overline{\mathrm{PA}} = 500\sqrt{3}$

따라서 두 지점 P, A 사이의 거리가 $500\sqrt{3}$ m이므로 걸린 시간은 속력이 10 m/s

시간 $= \dfrac{\text{거리}}{\text{속력}}$, $\dfrac{500\sqrt{3}}{10} = 50\sqrt{3}$(초)이다. $\therefore$ $50\sqrt{3}$(초)