

Chapter

1

교사경 기출 문제 이야기

1. 정의역이 $x < 4$ 인 두 함수 $f(x) = 2^x$, $g(x) = x^2$ 의 그래프가 만나는 두 점을 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) 라 할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $x_1 < x_2$)

... 2009학년도 7월 교육청 가형 13번

ㄱ. $x_1 + y_1 > 0$

ㄴ. $x_1y_1 + x_2y_2 < 0$

ㄷ. $|x_1y_2| - |x_2y_1| > 0$

1. 미분 없는 삶

평가원 기출 문제를 풀어보셨으면 아시겠지만, 그래프를 그려 풀이하는 것이 수월합니다. 하지만 미분은 배우기 전 단계라 미분 없이 풀어야 하는데, 기초적인 지식으로 알고 있는 개형을 그리면서 접근하는 것이 최선입니다.

기본적으로 지수함수와 다항함수는 연립해서 근을 구할 수 없습니다. 지수함수와 로그함수와도 같죠. 지수함수는 밑이 같은 지수함수끼리만 계산해서 확실하게 모든 근을 구해낼 수 있습니다. 하지만 특수한 점이나 사잇값 정리를 이용해 대략적인 근의 위치는 파악할 수 있습니다.

ㄱ. $f(2) = g(2) = 4$ 으로 근 하나는 쉽게 찍어 구할 수 있습니다.

다른 근이 난감한데, 두 함수의 대소관계를 비교하기 위해 $h(x) = f(x) - g(x)$ 로 둡시다.
 $h(0)h(-1) < 0$ 이므로 다른 근은 $-1 < x_1 < 0$ 입니다. ... 참

ㄴ. 윤이 좋게도 다항식과의 교점이라 y 를 모두 x 에 대한 다항식으로 바꿔줄 수 있습니다.

$x_1^3 + x_2^3$ 이니 인수분해하면, $(x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2)$ 임을 압니다.

선지 ㄱ에 의해 $x_1 + x_2 > 0$ 이고 뒤에 붙은 이차식은 허근을 가지니 이는 거짓입니다. ... 거짓

ㄷ. 역시 윤이 좋게도 다항식과의 교점이라 y 를 모두 x 에 대한 다항식으로 바꿔줄 수 있습니다.

따라서 다음과 같은 연산을 수행합니다.

$$\begin{aligned} |x_1x_2^2| - |x_2x_1^2| &= |x_1||x_2^2| - |x_2||x_1^2| \\ &= |x_1x_2|(|x_2| - |x_1|) \end{aligned}$$

이는 선지 ㄱ의 판단 결과로 판단 가능합니다. ... 참

2. 삼각형의 세 꼭짓점에서 각각의 대변 또는 그 연장선에 내린 수선의 길이의 비가 2:3:4이다. 이 삼각형의 세 내각 중 최대의 각을 θ 라 할 때, $\cos\theta = -\frac{p}{q}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오.
(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) ... 2003학년도 4월 교육청 예체능

2. 이 정도는 간단하게

세 점 A, B, C에서 세 대변 (또는 그 연장선)에 내린 수선의 발을 차례로 D, E, F라 합시다.

삼각형 ABC의 넓이를 S 라 하면, 다음과 같은 식이 성립합니다.

$$\overline{AD} = \frac{2S}{\overline{BC}}, \quad \overline{BE} = \frac{2S}{\overline{AC}}, \quad \overline{CF} = \frac{2S}{\overline{AB}}$$

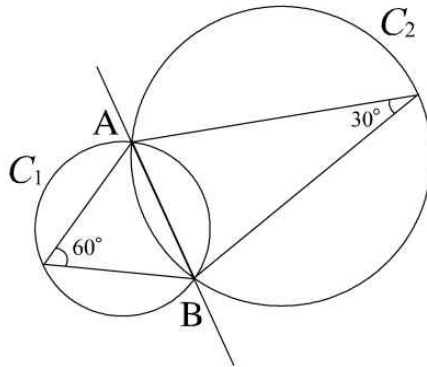
이는 주어진 조건에 의해 아래와 같이 환원됩니다.

$$\overline{AB} : \overline{AC} : \overline{BC} = 6t : 4t : 3t$$

따라서 코사인법칙에 의해

$$\cos \theta = -\frac{11}{24} \text{입니다.}$$

3. 두 원 C_1, C_2 가 그림과 같이 두 점 A, B에서 만난다. 선분 \overline{AB} 의 길이는 12이고, 그에 대한 원주각의 크기는 각각 $60^\circ, 30^\circ$ 이다. 두 원 C_1, C_2 의 반지름의 길이를 각각 R_1, R_2 라고 할 때, $R_1^2 + R_2^2$ 의 값을 구하시오. ... 2004학년도 6월 고2 교육청 가형



3. 이정도 계산도 간단하게..

사인법칙에 의해 다음이 성립합니다.

$$\frac{\overline{AB}}{\sin 60^\circ} = 2R_1, \quad \frac{\overline{AB}}{\sin 30^\circ} = 2R_2$$

따라서 $R_1 = 4\sqrt{3}$, $R_2 = 12$ 입니다.

그러므로 답은 192입니다.

4. 함수 $f(x) = x^2 - 8x + a$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \begin{cases} 2x + 5a & (x \geq a) \\ f(x+4) & (x < a) \end{cases}$$

라 할 때, 다음 조건을 만족시키는 모든 실수 a 의 값의 곱을 구하시오.

(가) 방정식 $f(x) = 0$ 은 열린구간 $(0, 2)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

(나) 함수 $f(x)g(x)$ 는 $x = a$ 에서 연속이다.

... 2016학년도 4월 교육청 나형 30번

4. 사잇값정리와 연속

우리는 조건 (가)를 보고 사잇값 정리에 의해

$$f(0)f(2) = a(a-12) < 0 \text{임을 압니다.}$$

이어서 $f(x) = (x-4)^2 + a - 16$ 임으로

$$f(x+4) = x^2 + a - 16 \text{입니다.}$$

따라서 함수의 연속의 정의에 의해

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)g(x) = f(a)g(a) \text{를 계산해야합니다.}$$

연산을 수행하면

$$f(a)(a-8)(a+2) = 0 \text{입니다.}$$

$$f(a) = 0 \text{를 만족하려면, } a(a-7) \text{이고}$$

이렇게 나온 네 개의 숫자 중 처음 조건 (가)를 만족하는 숫자는

$$a = 7, a = 8 \text{입니다.}$$

따라서 구하는 값은 56입니다.

5. $a_1 = 1$ 이고 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 a_n = 0$ 인 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n a_n = B \quad (\text{단, } A, B \text{는 상수})$$

라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^2 (a_{n+1} - a_n)$ 을 구하면?

... 2004학년도 경찰대 공통 13번

5. 축차대입법

낮선 수열의 일반항을 보면 적당히 식변형하고 나열해서 규칙성을 찾을 생각을 합시다.

$$(n+1)^2(a_{n+1} - a_n) = (n+1)^2 a_{n+1} - n^2 a_n - 2na_n - a_n$$

앞에 $(n+1)^2 a_{n+1} - n^2 a_n$ 만 나열해보면,

$$2^2 a_2 - 1^2 a_1$$

$$3^2 a_3 - 2^2 a_2$$

$$4^2 a_4 - 3^2 a_3$$

$$5^2 a_5 - 4^2 a_4$$

$$6^2 a_6 - 5^2 a_5$$

...

$$(n+1)^2 a_{n+1} - n^2 a_n$$

지워지는 모양이 보이나요?

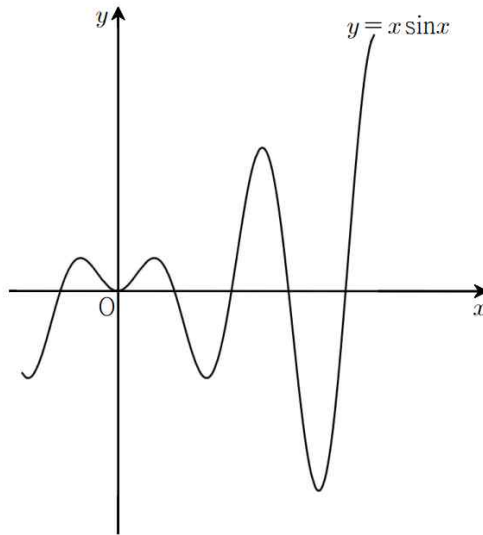
따라서 준식은 다음과같이 정리됩니다.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^2 (a_{n+1} - a_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (k+1)^2 (a_{k+1} - a_k) \\ &= -A - 2B - 1 \end{aligned}$$

6. 함수 $f(x)$ 를

$$f(x) = \int_0^x |t \sin t| dt - \left| \int_0^x t \sin t dt \right|$$

라 할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? ... 2021학년도 사관학교 가형 21번



- ㄱ. $f(2\pi) = 2\pi$
- ㄴ. $\pi < \alpha < 2\pi$ 인 α 에 대하여 $\int_0^\alpha t \sin t dt = 0$ 이면 $f(\alpha) = \pi$ 이다.
- ㄷ. $2\pi < \beta < 3\pi$ 인 β 에 대하여 $\int_0^\beta t \sin t dt = 0$ 이면 $\int_\beta^{3\pi} f(x) dx = 6\pi(3\pi - \beta)$ 이다.

6. 그래프는 주어졌다.

그래프가 주어졌다는 것은 피적분함수에 대한 개형파악이 출제의도가 아니라는 뜻입니다.

따라서 미분은 필요할 때가 되면 합시다.

ㄱ. 생각없이 계산하면 계산이 엄청나게 길어집니다.

따라서 적당한 α, β 을

$$\int_0^{\alpha} x \sin x dx = 0, \int_{\alpha}^{\beta} x \sin x dx = 0, \int_0^{\beta} x \sin x dx = 0$$

가 되게 잡습니다.

해당 식을 그래프를 이용해 이해하기 위해

$$\int_0^{\pi} x \sin x dx = S \text{라 잡고 } \int_{2\pi}^{\beta} x \sin x dx = T \text{라 잡습니다.}$$

이렇게 잡고 직접 계산하면 구하는 값은 $2S$ 가 됩니다.

다시 계산하면, 구하는 값은 2π 입니다. ... 참

ㄴ. 선지 ㄱ에 이어 계산하면, $f(\alpha) = 2S$ 입니다. ... 거짓

ㄷ. 선지 ㄱ에 의해 주어진 식은 $f(\beta)(3\pi - \beta)$ 입니다.

이어 계산하면, $f(\beta) = 2S + 2T$ 입니다.

따라서 문제에서 구하는 값은 $6\pi(3\pi - \beta)$ 입니다. ... 참