확통의 신

(경우의 수 + 확률 편)

Revised version

제작: 연세악어새

32

[250628]

탁자 위에 놓인 4개의 동전에 대하여 다음 시행을 한다.

4개의 동전 중 임의로 한 개의 동전을 택하여 한 번 뒤집는다.

처음에 4개의 동전이 모두 앞면이 보이도록 놓여 있다. 위의 시행을 6번 반복한 후 4개의 동전이 모두 같은 면이 보이도록 놓여 있을 확률이 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

33

[251130]

탁자 위에 5개의 동전이 일렬로 놓여 있다. 이 5개의 동전 중 1번째 자리와 2번째 자리의 동전은 앞면이 보이도록 놓여 있고, 나머지 자리의 3개의 동전은 뒷면이 보이도록 놓여 있다. 이 5개의 동전과 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 k일 때, $k \le 5$이면 k번째 자리의 동전을 한 번 뒤집어 제자리에 놓고, $k=6$이면 모든 동전을 한 번씩 뒤집어 제자리에 놓는다.

위의 시행을 5번 반복한 후 이 5개의 동전이 모두 같은 면이 보이도록 놓여 있을 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

$(1,8,10)$, $(1,8,11)$, $(1,8,12)$
$(2,9,11)$, $(2,9,12)$
$(3,10,12)$
순서쌍 (a,b,c)의 개수는
6

(ⅲ) $b-a=8$인 경우
(a,b,c)는
$(1,9,10)$, $(1,9,11)$, $(1,9,12)$
$(2,10,11)$, $(2,10,12)$
$(3,11,12)$
순서쌍 (a,b,c)의 개수는
6

(ⅳ) $b-a=9$인 경우
(a,b,c)는
$(1,10,11)$, $(1,10,12)$
$(2,11,12)$
순서쌍 (a,b,c)의 개수는
3

(ⅴ) $b-a=10$인 경우
(a,b,c)는
$(1,11,12)$
순서쌍 (a,b,c)의 개수는
1

(ⅰ)~(ⅴ)에서 $(A\cap B)$의 경우의 수는 $6+6+6+3+1=22$
이때 $\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{22}{35}$
$p=35, q=22$이므로 $p+q=57$

Question 37

Idea?

1부터 10까지의 자연수들을 3으로 나누었을 때의 나머지에 따라 다음과 같이 분류해보자.
$S_0=\{3,6,9\}$
$S_1=\{1,4,7,10\}$
$S_2=\{2,5,8\}$
선택된 수의 합이 3의 배수가 되려면 S_0, S_1, S_2 중 하나의 집합에서 세 개를 모두 선택하거나, S_0, S_1, S_2에서 하나씩 선택해야 한다.

Solution!

(ⅰ) 세 개의 수 중 4의 배수가 아닌 짝수가 1개, 홀수가 2개인 경우
(ⅱ) 세 개의 수 모두 홀수인 경우

[정답] 67
[해설]
1부터 10까지의 자연수 중에서 임의로 서로 다른 3개의 수를 선택하는 경우의 수는
${}_{10}\mathrm{C}_3=\dfrac{10\times9\times8}{3\times2\times1}=120$

선택된 세 개의 수의 곱이 4의 배수가 아니고, 합은 3의 배수인 경우는 다음과 같이 나눌 수 있다.
(ⅰ) 세 개의 수 중 4의 배수가 아닌 짝수가 1개, 홀수가 2개인 경우
(ⅰ)-① 2가 포함된 경우
2개의 홀수를 모두 S_2에서 선택하는 경우의 수는 없다.
2개의 홀수를 S_0, S_1에서 하나씩 선택하는 경우의 수는
$2\times2=4$
이때 경우의 수는
4
(ⅰ)-② 6이 포함된 경우
2개의 홀수를 모두 S_0에서 선택하는 경우의 수는
1
2개의 홀수를 S_1, S_2에서 하나씩 선택하는 경우의 수는
2
이때 경우의 수는
$1+2=3$
(ⅰ)-③ 10이 포함된 경우
이때 경우의 수는 (ⅰ)-②와 같으므로
3
세 개의 수를 선택하는 경우의 수는
$4+2\times3=10$

(ⅱ) 세 개의 수 모두 홀수인 경우
S_0, S_1, S_2 중 하나의 집합에서 홀수 세 개를 선택하는 경우는 없다.
S_0, S_1, S_2에서 홀수를 하나씩 선택하는 경우의 수는
$2\times2\times1=4$

(ⅰ), (ⅱ)에서 선택된 세 개의 수의 곱이 4의 배수가 아니고, 합은 3의 배수인 경우의 수는
$10+4=14$
선택된 세 개의 수의 곱이 4의 배수가 아니고, 합은 3의 배수일 확률은
$\dfrac{14}{120}=\dfrac{7}{60}$
$p=60, q=7$이므로 $p+q=60+7=67$

Question 38

[정답] 125
[해설]
시행을 4번 반복하여 네 장의 카드를 꺼내는 경우의 수는
6^4 (즉, $6^4\times k$는 $\overline{X}=3$이 되는 경우의 수와 같다.)

꺼낸 네 수를 각각 a, b, c, d라 하면
$a+b+c+d=12\left(\because \overline{X}=3\right)$
$a=a'+1$, $b=b'+1$, $c=c'+1$, $d=d'+1$로 놓으면
$a'+b'+c'+d'=8$
이때 0 이상의 정수 a', b', c', d'의 모든 순서쌍 (a',b',c',d')의 개수는
${}_4\mathrm{H}_8={}_{11}\mathrm{C}_8={}_{11}\mathrm{C}_3=165$
이때 a', b', c', d'는 5 이하의 정수이므로
8, 0, 0, 0으로 이루어진 순서쌍 4개
7, 1, 0, 0으로 이루어진 순서쌍 12개
6, 2, 0, 0으로 이루어진 순서쌍 12개
6, 1, 1, 0으로 이루어진 순서쌍 12개
총 40개는 제외해야 한다.
따라서 $6^4\times k$는